PRAKTISCHE ÜBUNGEN
ZUR
VERERBUNGSLEHRE

FÜR STUDIERENDE · ÄRZTE UND LEHRER

VON

PROFESSOR DR. GÜNTHER JUST

DIREKTOR DES INSTITUTS FÜR MENSCHLICHE ERBLEHRE UND EUGENIK
AN DER UNIVERSITÄT GREIFSWALD

ZWEITE VERMEHRTE UND VERBESSERTE
AUFLAGE

ERSTER TEIL

ALLGEMEINE VERERBUNGSLEHRE

MIT 55 ABBILDUNGEN

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1935

ISBN-13: 978-3-642-98520-1 e-ISBN-13: 978-3-642-99334-3
DOI: 10.1007/ 978-3-642-99334-3

Vorwort zur zweiten Auflage.

Die „Praktischen Übungen zur Vererbungslehre" waren viele Monate vergriffen. Dringende Arbeiten anderer Art hinderten den Verfasser, die neue Auflage früher hinausgehen zu lassen.

Das kleine Buch, dessen erster Teil nunmehr in zweiter völlig umgearbeiteter und stark erweiterter Auflage vorliegt, will den Anfänger auf dem Gebiete der Erbbiologie mit den wichtigsten Methoden der exakten Forschung durch eigene praktische Arbeit vertraut werden lassen und ihm zugleich für seine erste selbständige Weiterarbeit das notwendigste Rüstzeug an die Hand geben. Das Büchlein ist also eine Einführung. Speziellere Gegenstände, die dem Fortgeschritteneren vor allem beim Nachschlagen erwünscht sein dürften, sind in Anhängen zu den eigentlichen Übungen gebracht. Bei der ersten Durcharbeitung des Buches kann man also alle diese Anhänge ohne Gefahr für das Verständnis des folgenden überschlagen.

Das Buch stellt auch nicht etwa eine Zusammenfassung der Grundtatsachen über Variation und Vererbung dar; es wendet sich vielmehr an solche, die diese Tatsachen entweder bereits kennen oder sich doch gleichzeitig mit ihnen bekannt machen. Wo solche elementaren Tatsachen in den Übungen zur Sprache kommen, geschieht es im Sinne einer Herausarbeitung der für das methodische Verständnis notwendigen experimentellen Voraussetzungen oder gedanklichen Zusammenhänge.

Der vorliegende erste Teil des Buches, dessen zweiter, die Methoden der menschlichen Erblehre behandelnder in Bälde folgen wird, ist an Umfang gegenüber der ersten Auflage um mehr als das Doppelte gewachsen. Wenn das im Herbst 1923 erstmalig erschienene Buch damals die Aufgabe hatte, überhaupt erst einmal zur Durchführung solcher praktischen erbbiologischen Übungen an Universitäten und höheren Schulen anzuregen — eine Anregung, die auf fruchtbaren Boden gefallen ist, wovon außer literarischen Zeugnissen auch zahlreiche Zuschriften zeugen —, so hat die zweite Auflage, die in einer Zeit höchster allgemeiner Anerkennung für die Bedeutung erbbiologischer Unterweisung erscheinen kann, die Aufgabe, denen, in deren Händen diese Unterweisung liegt, Lehrern, Ärzten und Studierenden, ein entsprechend erweitertes Arbeitsmaterial und -werkzeug in die Hand zu geben.

Dabei war der Verfasser bemüht, dem Buche seinen elementaren Charakter zu belassen. Vor allem ist auch diesmal wieder das Buch in einer gewissen Breite geschrieben. Jeder Unterrichtserfahrene weiß, daß einführende Belehrung nie ausführlich genug sein kann. Wenn also manchem Leser gar zu viele Selbstverständlichkeiten ausdrücklich gesagt zu sein scheinen, so wird ein anderer um so dankbarer sein, daß ihm diese Dinge mitgeteilt werden, die zwar „eigentlich" jeder wissen müßte, die aber erfahrungsgemäß mancher eben doch nicht weiß.

Der Stoff des vorliegenden ersten Teils zerfällt in 25 Übungen, von denen weitaus die meisten gar keine oder recht geringe Kosten erfordern. Für jede Übung ist eine Arbeitszeit von 1 ½ bis 2 Stunden gedacht. Natürlich kommt aber viel darauf an, in was für einem Kursistenkreise die Durcharbeitung des Stoffes erfolgt. Ebenso muß die Auswahl von Übungen für Zwecke des biologischen Unterrichts an höheren Schulen dem Ermessen des einzelnen Lehrers anheimgestellt bleiben, da ja auch hier im einzelnen durchaus verschiedene Vorbedingungen bestehen.

Der Verlagsbuchhandlung hat der Verfasser für die gewohnte Sorgfalt bei der Herstellung des Buches zu danken, seinem Assistenten, Herrn Dr. Fritz Steiniger, für viele Unterstützung bei der Herstellung der Abbildungen.

Möge es der Neuauflage meines Buches beschieden sein, der Aufgabe zu dienen, die ihm heute gestellt ist: denen, an die es sich wendet, jenen Teil des Rüstzeuges zu liefern, der sie instandsetzt, ihre für unser ganzes Volk so wichtige Arbeit auf erbbiologischem Gebiete nicht nur mit einem Herzen voll Begeisterung, sondern auch mit derjenigen Sachkenntnis zu tun, die dem Ernst und der Größe des Gegenstandes entspricht.

Greifswald, im Januar 1935.

Günther Just.

Inhaltsverzeichnis.

I. Phänanalyse.

Übung 1.

Kontinuierliche Variabilität.

Material und Aufgabe für Übung 1—3.

Jeder Kursteilnehmer erhält 100 Bohnen. Es empfiehlt sich, nicht die Samen der Gemüsebohne (*Phaseolus vulgaris*), sondern die größeren Samen der Feuerbohne (*Phaseolus multiflorus*) zu benutzen.

Die typische Länge und die typische Dicke dieser Feuerbohnen ist festzustellen.

Technik.

Bohne für Bohne wird mittels einer Schublehre, z. B. einer für Kurszwecke völlig ausreichenden Holzschublehre (Abb. 1*a*), sorgfältig gemessen und die einzelnen Werte notiert.

Zweckmäßig arbeiten je zwei Praktikanten in der Weise zusammen, daß der eine nur mißt, der andere protokolliert; sind die ersten hundert Bohnen gemessen, so wechseln beide mit der Arbeit.

Buchungstabelle.

Bohne Nr.	Länge	Dicke
1		
2		
3		

Um die Messung nicht unnötig zu komplizieren, empfiehlt es sich für die Kursarbeit, mit einem Spielraum von 1 mm zu arbeiten. Zweckmäßigerweise bucht man dabei alle Exemplare, die beispielsweise 13,0, 13,1 usw. bis 13,9 mm lang sind, als 13, und bezeichnet erst dann, wenn beim Messen eben der Teilstrich 14 erscheint, die betreffende Bohne als 14 mm lang. Bei dieser Art der Ablesung, die die Bruchteile der mm unberücksichtigt läßt, kann man sich kaum irren.

Hat man Schublehren mit Nonius (Abb. 1*b*) zur Verfügung, so kann man der Übung halber auf Zehntelmillimeter genau ablesen.

Tabellarische Darstellung.

Ein anschauliches Bild der Größenverschiedenheiten, die sich bei den 100 Bohnen finden, entsteht, wenn gleich beim Messen die Bohnen, eine über die andere, zu Gruppen gleicher Länge zusammengelegt werden.

Nach Beendigung der Messung fertigt jeder Teilnehmer für die Bohnenlängen und für die Bohnendicken je zwei Übersichtstabellen an, die die 100 Bohnen nach ansteigenden Größenklassen geordnet zeigen.

Und zwar werden in die erste Tabelle die *für* jede Größenklasse gefundenen Bohnenzahlen eingetragen; so entsteht folgende

Tab. 1. *Variationsreihe:*

Länge	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26 mm
Anzahl der Bohnen:															
1. Praktikant . .	1	1	3	9	10	16	23	18	11	7	0	0	0	1	100
2. Praktikant . .	0	1	5	7	7	20	28	17	5	6	3	1	0	0	100

In die zweite Tabelle wird eingetragen, wieviel Bohnen sich insgesamt *bis zu* dem betreffenden Größenwerte finden; diese Zahlen ergeben

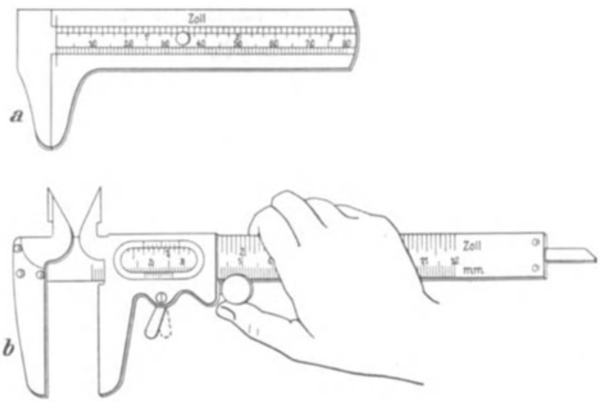

Abb. 1. Schublehre. *a* Einfaches Kursmodell aus Buchsbaum, *b* Helios-Schublehre mit Nonius und Feststellhebel. (Meßwerkzeugfabrik Werdau/Sa.).

sich natürlich durch fortschreitende Aufaddierung der Bohnenzahlen der ersten Tabelle von links nach rechts. So entsteht folgende

Tab. 2. *Aufzählungsreihe:*

Länge bis	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26 mm
Anzahl der Bohnen.		1	2	5	14	24	40	63	81	92	99	99	99	99	100

Schließlich werden die von sämtlichen Teilnehmern gefundenen Zahlen zu entsprechenden Gesamttabellen zusammengeworfen.

Tab. 3. *Variationsreihe:*

Länge	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26 mm	zus.
Anzahl der Bohnen .	5	20	49	95	130	192	192	153	95	49	13	3	2	2		1000

Tab. 4. *Aufzählungsreihe:*

Länge bis	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26 mm
Anzahl der Bohnen		5	25	74	169	299	491	683	836	931	980	993	996	998	1000

Wir beschränken uns in dieser Übung 1 zunächst auf die Durcharbeitung ausschließlich der Längenmessungen.

Auswertung.

Übersicht über die Grundtatsachen. 1. Es zeigt sich, daß nicht jeder Bohne die gleiche Länge zukommt: die Bohnenlänge ist kein konstantes Merkmal, sondern eine variable Größe.

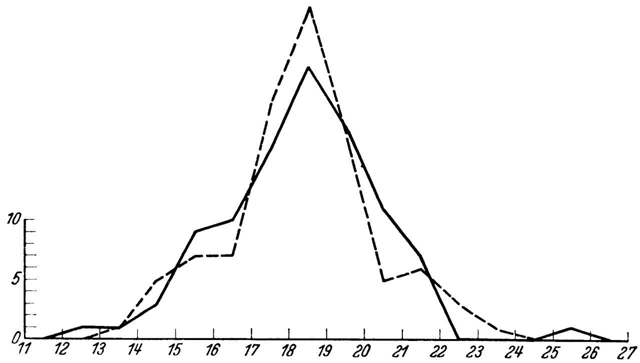

Abb. 2. Variationspolygone der Länge von je 100 Feuerbohnen; graphische Darstellung der beiden Variationsreihen Tab. 1.
——— Messungen des 1. Praktikanten.
– – – – Messungen des 2. Praktikanten.

Eine solche Variation finden wir bei der Untersuchung von Eigenschaften von Tieren und Pflanzen immer aufs neue — oder wenn wir statt des statisch-morphologischen Ausdrucks „Eigenschaft“ einen dynamisch-biologischen wählen wollen: bei der Untersuchung physiologischer oder morphogenetischer Vorgänge, deren — dauerndes oder vorübergehendes — Ergebnis in der betreffenden „Eigenschaft“ gegeben ist.

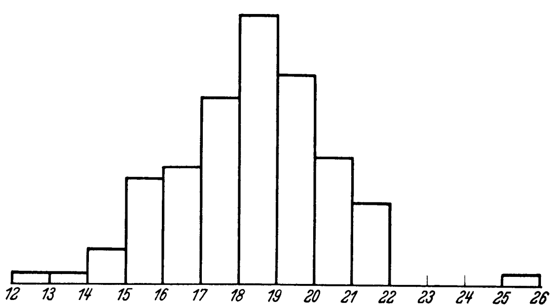

Abb. 3. Treppenpolygon der Länge von 100 Feuerbohnen; graphische Darstellung der Variationsreihe 1, Tab. 1.

Selten nur lassen sich Merkmale von Organismen als konstante Größen zahlenmäßig ausdrücken; vielmehr stellen sie fast stets solche Größen dar, die innerhalb gewisser Grenzen schwanken, die also eine bestimmte, sei es geringere oder umfangreichere, Variationsbreite besitzen.

2. Wenn wir in Übung 9 die Anzahl der Strahlen in der Flosse eines Fisches oder in Übung 7 die Randblüten eines Korbblütlers auszählen werden, so werden wir für jedes Individuum immer eine ganze Zahl, zum Beispiel 21, als zahlenmäßige Angabe für sein individuelles Merkmal erhalten. Im Gegensatz zu solcher ganzzahligen oder diskontinu-

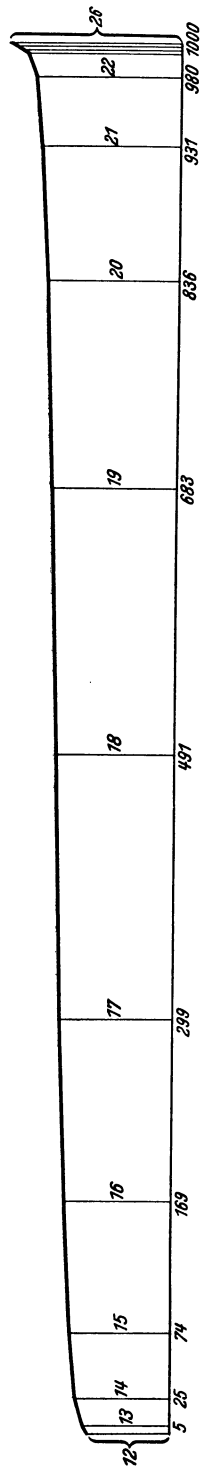

Abb. 4. Ogivenkurve der Länge von 1000 Feuerbohnen; graphische Darstellung der Aufzählungsreihe Tab. 4. Auf der unteren Linie sind die Bohnenzahlen abgetragen, auf den Senkrechten die Bohnenlängen.

ierlichen Variabilität haben wir es bei der Variation der Bohnenlängen mit einer kontinuierlichen Variabilität zu tun. Eine solche ist dadurch ausgezeichnet, daß zwischen den einzelnen Individuen — den Varianten — alle nur denkbaren Größenübergänge bestehen können, daß also die Maße der einzelnen Varianten allmählich, kontinuierlich, ineinander übergehen (Abb. 4).

Um unser Material zahlenmäßig untersuchen zu können, müssen wir es daher in Klassen ordnen, die, mögen sie einen geringeren oder einen größeren Spielraum umschließen, jedenfalls nicht durch einen bestimmten Größenwert gekennzeichnet sind, sondern durch zwei Grenzwerte.

3. Drittens zeigt sich, daß sich die Individuen nicht gleichmäßig auf die einzelnen Variantenklassen verteilen. Vielmehr häufen sich die Individuen in der Mitte der Tabelle, während nach rechts und links hin die Häufigkeitszahlen absinken, und zwar kann das, wie in unserem Falle, nach beiden Seiten hin in annähernd gleicher Stärke geschehen. Die Individuenzahlen ordnen sich also um einen etwa in der Mitte der Übersicht stehenden größten Längenwert, der somit die meisten Einzelfälle auf sich vereinigt, oder um zwei unter sich ungefähr gleich große größte Werte (Tab. 1, 3).

Graphische Darstellung. Anschaulich lassen sich die von uns beobachteten Tatsachen in drei Diagrammen (Schaubildern) zur Darstellung bringen.

a) Variationspolygon. Man trägt auf Millimeterpapier auf einer geraden Linie (Abszisse) in gleichen Abständen (etwa 1 cm) Markierungen ab, die den Grenzwerten der einzelnen Variantenklassen entsprechen (also z. B. mit den Zahlen 12, 13, 14 usw. bezeichnet werden). In der Mitte zwischen je zwei Markierungspunkten wird senkrecht über der Abszissenachse ein Punkt um so viele Maßeinheiten (z. B. Millimeter) von der Abszisse entfernt eingetragen, als Individuen in der betreffenden Variantenklasse vorhanden sind. Wenn man dann je zwei nebeneinander gelegene Punkte miteinander verbindet, so erhält man als graphischen Ausdruck der in Tab. 1 niedergelegten Zahlenverhältnisse ein Variationspolygon (Abb. 2).

b) Treppenpolygon. Eine andere Form des Variationspolygons stellt das Treppenpolygon dar. In der der Individuenzahl der einzelnen Variantenklassen entsprechenden Entfernung werden Parallelen zur Abszissenachse gezogen, die sich mit den in den Markierungspunkten der Klassengrenzen errichteten Senkrechten treffen. So entsteht eine Reihe nebeneinander stehender Rechtecke, deren Höhe die Häufigkeit der einzelnen Variantenklassen veranschaulicht (Abb. 3).

c) GALTONsche Ogivenkurve. Wenn wir die Bohnen einer Geraden entlang genau der Größe nach aneinanderreihen würden, links mit der klein-

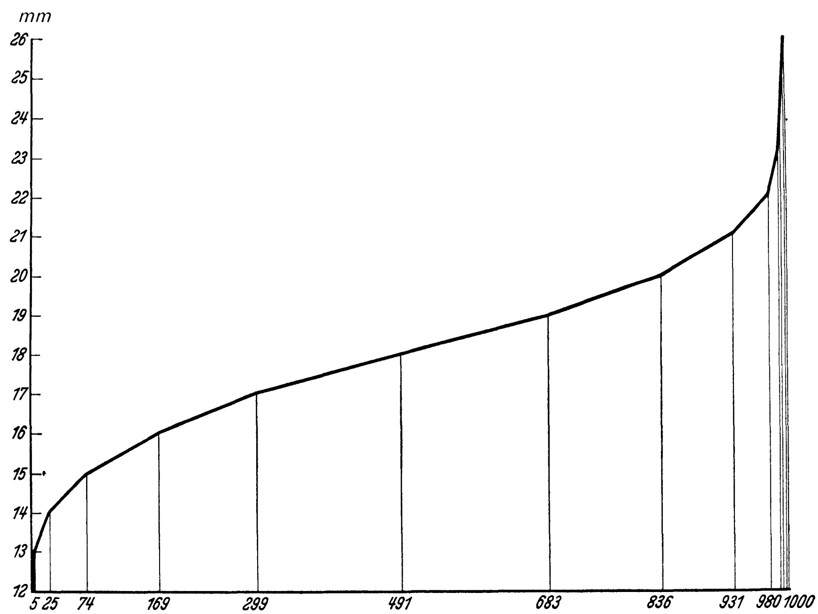

Abb. 5. Ogivenkurve der Länge von 1000 Feuerbohnen (Tab. 4).

sten beginnend, so würden die Spitzen der sämtlichen 1000 Bohnen, miteinander verbunden, eine Kurve ähnlich Abb. 4 ergeben, wenn wir uns die Dicke der einzelnen Bohnen zur Dicke einer dünnen Scheibe zusammengeschrumpft denken.

Das Bild einer solchen Kurve wird eindrucksvoller, wenn wir die Größenunterschiede der Bohnen künstlich übertreiben, indem wir wieder 1 mm Längenunterschied = 1 cm in der Zeichnung setzen, während wir gleichzeitig die Entfernungen zwischen je zwei aneinandergereihten Bohnen, d. h. den von den Bohnen eingenommenen Raum, im Maße stark herabsetzen (z. B. 5 Bohnen = 1 mm). Wir verfahren dabei, indem wir wieder, wie unter *a*, mit den Individuenzahlen der Klassen arbeiten, folgendermaßen:

Auf der Abszisse tragen wir diesmal die Individuenzahlen ab, und zwar (vgl. Tab. 2, 4) diejenigen, die sich *bis* zum Längenwert 13 mm, 14 mm usw. insgesamt finden. Wir markieren also z.B. die 5 Bohnen der ersten Kolumne der Tabelle, indem wir $5 : 5 = 1$ mm rechts vom Nullpunkt der Abszisse einen Strich machen, die 25 Bohnen, die größer als 13 mm, aber kleiner als 14 mm sind, durch einen zweiten Strich in $25 : 5 = 5$ mm Entfernung vom Nullpunkt, usw. Der Gesamtindividuenzahl (in unserem Falle 1000) muß dann natürlich der auf der Abszissenachse am weitesten rechts markierte Punkt ($1000 : 5 = 200$ mm $= 20$ cm) entsprechen. Die Punkte auf der Abszissenachse liegen zuerst einander näher, dann weiter voneinander entfernt, um sich schließlich wieder dicht zusammenzudrängen.

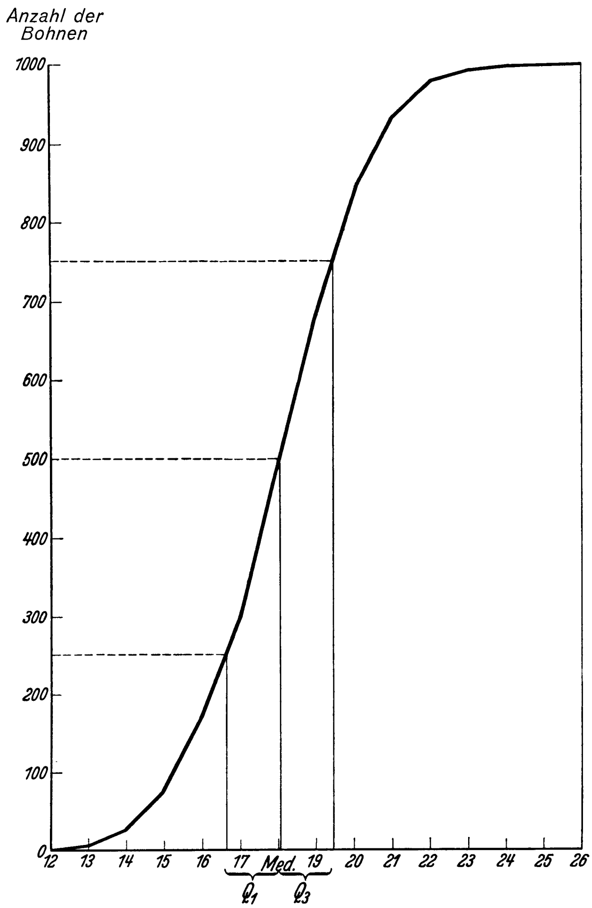

Abb. 6. Summenkurve der Länge von 1000 Feuerbohnen (Tab. 4).

Direkt senkrecht über den markierten Punkten tragen wir nun als Ordinaten die zu den betreffenden Individuenzahlen gehörigen oberen Klassenwerte ab: dem ersten Markierungspunkt (1 cm vom Nullpunkt) entspricht der Längenwert 13, dem zweiten Punkt der Längenwert 14 usw. Da die Zeichnung indes zuviel Raum beanspruchen würde, wenn wir die Lote 13 cm, 14 cm usw. bis 26 cm lang machten, so verlegen wir die Kurve um so viel Zentimeter gegen die Abszisse, daß das zuerst zu errichtende Lot nur 1 cm, das zweite 2 cm, das dritte 3 cm usw. lang ist. In unserem Falle verkürzen wir also alle Ordinaten um 12 cm; die längste Ordinate ist dann $26 - 12 = 14$ cm lang. Die Endpunkte der Ordinaten verbinden wir miteinander und erhalten so die nach ihrer Form sog. Ogivenkurve (abgekürzt auch Ogive genannt).

Die Abb. 5 ist in diesem Maßstab entworfen, aber für die Wiedergabe in diesem Buch entsprechend verkleinert worden. Abb. 4 dagegen ist nur wenig verkleienrt worden.

d) Summenkurve. Drehen wir diese Zeichnung um 90° nach links und betrachten sie spiegelbildlich, so erhalten wir die Kurve Abb. 6, deren Koordinatengrundriß mit demjenigen des Variationspolygons (Abb. 2, 3) übereinstimmt: auf der Abszisse sind die Variantenklassen eingetragen, während an der Ordinate die jeweiligen Individuenzahlen abgelesen werden können, nur eben diesmal diejenigen, die bis zu dem betreffenden Klassenwerte insgesamt gefunden wurden. Diese Kurve bezeichnet man daher sinngemäß als Summenkurve.

Exakte Auswertung. Die in den Tab. 1—4 bzw. in den Kurven Abb. 2—6 dargestellten Tatsachen sollen nun genauer analysiert werden. Unsere Aufgabe ist es ja, die typische Länge der Feuerbohnensamen festzustellen. Daher muß es unser Bestreben sein, die Vielzahl der Werte, die wir gefunden haben, durch einen einzigen Zahlenwert, eben den typischen Wert, zu ersetzen.

1. Als solchen könnten wir diejenige Variantengröße wählen, auf die die meisten Bohnen entfallen. Diese Zahl heißt der dichteste Wert, der Modalwert oder die Mode (*Mo*). Er kann jedoch bei kontinuierlicher Variabilität nicht einfach am Fußpunkt der Senkrechten, die vom höchsten Punkt des Polygons auf die Abszissenachse gefällt wird, abgelesen, sondern muß durch Interpolation ermittelt werden.

2. Zweckmäßig erscheint auch derjenige Wert, der die nach ansteigender Größe angeordnete Gesamtheit unserer Bohnen (Abb. 4, 5, Ogive) genau in zwei Hälften von gleicher Individuenzahl teilt, in unserem Falle (1000 Individuen) also das Längenmaß der im Punkte 500 $\left(=\frac{1000}{2}\right)$ der Abszisse errichteten Senkrechten. Dieser Wert, der also als Mediane (*Med*) genau zwischen den beiden Individuenhälften hindurchschneidet, stellt gleichzeitig die obere Größengrenze für die eine und die untere Größengrenze für die andere dieser beiden Individuenhälften dar (Abb. 6, 16).

3. Am zweckmäßigsten muß aber, wie wir noch näher sehen werden, derjenige Wert genannt werden, der die durchschnittliche Größe sämtlicher von uns untersuchten Bohnen angibt. Wir können diesen Wert, der ja nichts anderes ist als das arithmetische Mittel aus allen unseren Einzellängenwerten, demgemäß als Mittelwert (*M*) bezeichnen.

Anhang zu Übung 1.

Zur Technik des Messens.

1. Längenmessungen. *Makroskopische Maße* kann man oft (vgl. auch Abb. 1b) mittels eines Winkelmaßes oder einer Schublehre direkt abnehmen. Von kleineren Körpern kann man sie mittels eines einfachen Stechzirkels nehmen, den man zum Zweck der Ablesung auf ein Holz-, Metall- oder Papierlineal mit Millimetereinteilung aufsetzt. Eine Skala mit bloßer Millimetereinteilung empfiehlt sich für feinere Messungen mehr als eine solche mit Einteilung in halbe Millimeter, weil bei letzterer wegen der Engheit der Teilstriche die Ablesung sehr viel mühsamer ist, während auch erstere nach einiger Übung eine genügend genaue Abschätzung auf Zehntelmillimeter gestattet.

Mikroskopische Maße kann man entweder direkt am Objekt mittels Okular- und Objektmikrometers nehmen oder besser auf dem Umweg über eine Zeichnung, die die Konturen des Objekts festhält oder wenigstens die Endpunkte der zu messenden Strecken markiert. Von der Zeichnung nimmt man die Maße durch Anlegen eines Maßstabes oder wieder durch Abgreifen mit dem Stechzirkel oder der Schublehre.

Man rechnet die so gewonnenen Maße in die tatsächlichen Größenwerte um, indem man bei gleicher Vergrößerung eine Zeichnung von den Teilstrichen eines Objektmikrometers anfertigt, ausrechnet, wieviel Millimeter der Zeichnung auf die Entfernung zwischen zwei Teilstrichen des Objektmikrometers kommen, und mit dem so errechneten Quotienten die an den Zeichnungen gemessenen Werte multipliziert. Man kann die Zeichnung auch von vornherein in einer bestimmten Vergrößerung herstellen.

Besonders geeignet für die Herstellung derartiger Zeichnungen sind die verschiedenen Modelle von Projektions-Zeichenvorrichtungen.

2. Flächenmessungen sind, sowohl am makroskopischen wie auch besonders am mikroskopischen Objekt, leicht auf folgendem Umwege durchzuführen. Die betreffenden Objekte werden auf gutem, starkem Papier oder Karton gezeichnet, die Zeichnungen sorgfältig ausgeschnitten und gewogen. Zum Zweck der Umrechnung wiegt man ein Papier- oder Kartonstück von bekanntem Flächeninhalt, so daß man das Gewicht pro Flächeneinheit erhält. Aus den Gewichten der ausgeschnittenen Zeichnungen läßt sich dann auch ihr Flächeninhalt leicht errechnen.

Übung 2.

Mittelwert.

Berechnung des Mittelwertes M. Wenn wir aus den uns vorliegenden 1000 Bohnengrößen das arithmetische Mittel errechnen wollen, so müssen wir in jeder Variantenklasse die darin enthaltene Individuenzahl (p) mit dem betreffenden Klassenwert (V) multiplizieren, dann die sämtlichen so erhaltenen Faktoren ($p \cdot V$) zusammenzählen und schließlich die Summe aller dieser $p \cdot V$ (schreib: $\Sigma p V$; lies: Summe aller Produkte p mal V, d. h. Summe aller Produkte aus den jeweils einander zugehörigen Werten von p und V) durch die Gesamtzahl (n) der Individuen dividieren. So erhalten wir den Mittelwert:

$$M = \frac{\Sigma p V}{n}.$$

Um diese Multiplikation ausführen zu können, müssen wir aber erst unseren Variantenklassen, die wir ja bisher nur durch ihre Größengrenzen charakterisiert haben, einen bestimmten Klassenwert (V) zuschreiben. Als solchen wählen wir jeweils den in der Mitte zwischen den Grenzwerten liegenden Zahlenwert. Wir teilen also unseren Klassen die Werte 12,5, 13,5 usw. zu. Bei einer solchen Klassenwertzuteilung begehen wir natürlich fortgesetzt Fehler, indem wir ja Individuen jetzt durch einen und den gleichen Längenwert charakterisieren, die in Wirklichkeit gar nicht die gleiche Länge besitzen. Die Ungenauigkeit, die wir bei einer solchen Maßnahme begehen, erscheint verhältnismäßig gering, da ja solchen Bohnen, die beispielsweise in der Klasse 16,5 um gewisse Bruchteile kleiner sind als dieser Klassenwert, andere gegenüberstehen werden, die um ähnliche Beträge größer sind. Die Klassenwerte werden daher, wenn die Spielräume zwischen den Klassengrenzwerten nur genügend klein gewählt werden, als hinreichend genauer Ausdruck der Individuengröße innerhalb der einzelnen Klasse gelten können. Immerhin bleibt eine, wenn auch kleine Ungenauigkeit bestehen. Wir werden daher zwar zunächst mit den Klassenwerten arbeiten dürfen, später aber den dabei begangenen Fehler durch eine entsprechende Korrektur wieder auszuschalten suchen müssen (vgl. S. 23).

$p \cdot V$	
$1 \cdot 12\,5 =$	12,5
$1 \cdot 13{,}5 =$	13 5
$3 \cdot 14{,}5 =$	43,5
. .	
. .	
$1 \cdot 25{,}5 =$	25,5

$$\Sigma\, p\, V = 1832{,}0$$

$$M = \frac{\Sigma p V}{n} = \frac{1832{,}0}{100}$$

$$M = 18\,32$$

Wir berechnen also den Mittelwert an Hand der Zahlen in Tab. 1 folgendermaßen (siehe obenstehende Zusammenstellung).

Vereinfachte Methode der Mittelwertbestimmung.

Die Mittelwertberechnung können wir erheblich vereinfachen, wenn wir uns klarmachen, daß die Klassenwerte auch als Summen geschrieben werden können, die den kleinsten Klassenwert, in unserem Falle also $V = 12{.}5$, als einen der beiden Summanden enthalten, als zweiten Summanden den jeweiligen Zuwachs des Variantenwertes gegenüber diesem kleinsten Klassenwert, in unserem Falle also die Zuwachsgrößen 1 bis 9. Den kleinsten Klassenwert (12,5) können wir, da er in sämtlichen Individuen enthalten ist, daher sofort mit n (hier = 100) multiplizieren. Die Einzelmultiplikationen mit p dagegen beschränken sich auf die zusätzlichen Summanden 1, 2, 3 usw.; wir multiplizieren also $p = 1$ nicht mehr mit 13,5, sondern nur noch mit 1, $p = 3$ nicht mehr mit 14,5, sondern mit 2 usw. Nunmehr gewinnt die Rechnung folgende einfache Form (siehe nebenstehende Zusammenstellung).

V	Kleinster Klassenwert	Zuwachs
12.5 =	12 5	+ 0
13.5 =	12 5	+ 1
14 5 =	12,5	+ 2
.	.	
.	.	
21 5 =	12 5	+ 9

$100 \cdot 12\,5 =$	1250
$1 \cdot 0 =$	—
$1 \cdot 1 =$	1
$3 \cdot 2 =$	6
$9 \cdot 3 =$	27
. .	
. .	
$7 \cdot 9 =$	63
$1 \cdot 13 =$	13
$\Sigma p V =$	1832

Da indes diese Methode nicht immer so leicht anwendbar ist, die zuerst benutzte aber oft umständliches Rechnen erforderlich macht, so üben wir uns noch in einer weiteren Methode der Berechnung des Mittelwertes, die zwar zunächst als die schwierigere erscheinen will, sich aber schon bei geringer Übung als die weitaus zweckmäßigere erweist und uns zudem bei unserer späteren Arbeit sehr wertvoll sein wird. Diese beste Methode der Mittelwertberechnung besteht in einer noch weiteren Vereinfachung der soeben geübten Methode.

Verkürzte Methode der Mittelwertbestimmung.

Allgemeine Ableitung. Wir gehen von einem angenommenen Mittelwert aus, den wir A (= Ausgangswert) nennen. Als solchen wählen wir einen beliebigen Variantenwert V, natürlich möglichst nahe dem Werte, den wir als wirklichen Mittelwert vermuten. Es wäre ein großer Zufall, wenn wir dabei gerade genau den wirklichen Mittelwert M träfen. Im allgemeinen werden wir A etwas zu klein oder zu groß gegenüber M gewählt haben, so daß sich A von M durch einen meist kleinen Betrag unterscheidet, den wir b (Betrag) nennen:

$$\boldsymbol{M = A + b}$$

wobei dieser Differenzbetrag b sowohl ein positiver wie ein negativer Wert sein kann.

Wenn wir die Größe dieses Betrages b kennen würden, so besäßen wir sogleich auch den wirklichen Mittelwert M, da ja $M = A + b$ ist. Wie aber gelangen wir zu dem Wert von b?

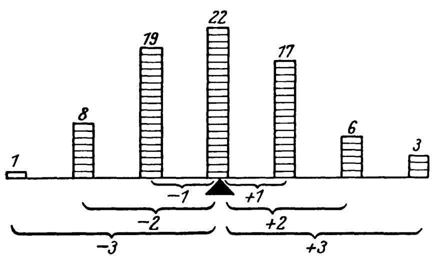

Abb. 7. Der Mittelwert als Gleichgewichts-Nullpunkt.

Wir stellen folgende einfache Überlegung an:

Der wirkliche Mittelwert M ist dadurch ausgezeichnet, daß sich um ihn die Varianten so gruppieren, als hielten sie sich das Gleichgewicht auf einer Waage. In der Abb. 7 ist das in schematischer Weise veranschaulicht. Zu beiden Seiten des Gleichgewichtspunktes, auf dem 22 Gewichte liegen, sind weitere, ebenfalls willkürlich gewählte Gewichtspakete in regelmäßigen Abständen nach Art eines Variationspolygons angeordnet; die Gewichte entsprechen den Individuen, die Abstände den Unterschieden zwischen den Variantenwerten.

$$\begin{array}{rr} -1\cdot 19 = -19 & +1\cdot 17 = 17 \\ -2\cdot \;\;8 = -16 & +2\cdot \;\;6 = 12 \\ -3\cdot \;\;1 = -\;\;3 & +3\cdot \;\;3 = \;\;9 \\ \hline -38 & +38 \end{array}$$

Wie die nebenstehende Rechnung zeigt, herrscht auf beiden Seiten das gleiche Gewicht, nämlich 38; das genau in der Mitte befindliche Gewicht 22 bleibt auf die Gleichgewichtslage natürlich ohne Einfluß. Wir können diesem Werte 38 in der üblichen Weise einmal ein positives, das andere Mal ein negatives Vorzeichen geben, je nachdem ob die Gewichte rechts oder links vom Gleichgewichtspunkte liegen. Dann heben sich die beiderseitigen Summen gegenseitig auf, indem $+ 38 - 38 = 0$ ist.

Über die Stellung des wirklichen Mittelwertes M in der Variationsreihe besagt unser Vergleich mit der Waage: Die Summe der positiven Abweichungen der Individuen vom Mittelwert ist zahlenmäßig ebenso groß wie die der negativen; nur das Vorzeichen ist beidemal verschieden. Die Summe der Abweichungen **sämtlicher** Individuen vom Mittelwert M muß daher $= 0$ sein.

Es leuchtet ohne weiteres ein, daß die Summe der Abweichungen der Varianten von einem anderen als dem Mittelwert nicht $= 0$ sein kann, sondern ein Ungleichgewicht zwischen positiver und negativer Abweichungssumme darstellen muß. Am Beispiel unserer Waage erläutert: Bei Benutzung jedes anderen als des in Abb. 7 eingezeichneten Punktes als Stützpunkt muß die Waage sinken, sei es nach rechts oder nach links.

Wenn wir also von einem angenommenen Mittelwert A ausgehen und die Summe der Abweichungen berechnen, die sich nunmehr ergibt, so erhalten wir nicht 0, sondern eine — entweder positive oder negative — Zahl, die angibt, um welchen Betrag die Gesamtheit der Individuen von A abweicht.

Der Mittelwert M berechnet sich nun insofern nicht auf die Gesamtheit der Individuen, sondern auf das einzelne Individuum, als er ja eben einen durchschnittlichen Größenwert angibt. Ebenso ist nun auch der angenommene Mittelwert A auf das einzelne Individuum bezogen. Wenn daher von diesem Werte A die Gesamtheit der Individuen um einen bestimmten Betrag abweicht, so muß dieser Betrag, durch die Gesamtindividuenzahl (n) dividiert, angeben, um wieviel jedes einzelne Individuum im Durchschnitt von A abweicht.

Damit haben wir aber den gesuchten Betrag b. Denn wenn ein individueller Variantenwert von M durchschnittlich um 0 abweicht, so muß er von einem Wert A, der von M um das Stück b entfernt liegt, im Durchschnitt eben gerade um diesen Betrag b abweichen (Abb. 14).

Wenn wir so b als die durchschnittliche Abweichung der Varianten vom angenommenen Mittelwert A (anders ausgedrückt: als die Summe aller Abweichungen von A, dividiert durch n) errechnet haben, brauchen wir den so gewonnenen Wert für b, der positiv oder negativ sein kann, nur noch zu A zu addieren, um M zu erhalten:

$$M = A + b.$$

Wir machen uns das Ganze an unserem schematischen Beispiel noch einmal klar. Wir nehmen als Stützpunkt der Waage den Punkt unter der Individuenzahl 17 an, rücken den Stützpunkt also um eine Entfernungseinheit nach rechts. Dann weichen von diesem angenommenen Punkte A ab (vgl. Abb. 7)

um $+1$	6 Individuen,
um $+2$	3 Individuen,
um -1	22 Individuen,
um -2	19 Individuen usw.

Die Summe der Abweichungen aller Individuen von A berechnet sich also folgendermaßen:

$$\begin{array}{rr} -1\cdot 22 = -22 & +1\cdot 6 = +\ 6 \\ -2\cdot 19 = -38 & +2\cdot 3 = +\ 6 \\ -3\cdot\ \ 8 = -24 & \\ -4\cdot\ \ 1 = -\ \ 4 & \\ \hline -88 & +12 \end{array}$$

Die Gesamtsumme ist $-88 + 12 = -76$. Diesen Wert müssen wir durch n (die Summe aller Individuen) dividieren; in unserem Beispiel ist $n = 76$.

$$-76:76 = -1$$
$$b = -1$$

D.h. wir müssen von unserem angenommenen Stützpunkt A aus um eine Einheit nach der negativen Seite hin, d.h. nach links, rücken, um in der Tat damit wieder den wirklichen Gleichgewichtspunkt (M) zu erhalten.

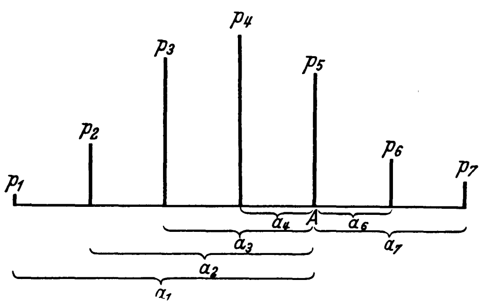

Abb. 8. Der angenommene Mittelwert. (Vgl. Abb. 8 mit Abb. 7.)

Buchstabenbezeichnungen. Wir führen folgende Buchstabenbezeichnungen (vgl. Abb. 8) ein. Die zu einer bestimmten Variantenklasse gehörige Individuenzahl nennen wir p_1, p_2, p_3 usw. oder allgemein p; die Entfernung einer einzelnen Variantenklasse von dem angenommenen Mittelwert A bezeichnen wir mit a (mnemotechnisch: zu groß A gehört klein a). Die Summe der Abweichungen aller Varianten von A ist also $p_1 \cdot a_1 + p_2 \cdot a_2 + p_3 \cdot a_3 + \ldots$ oder kurz $\Sigma\, p\, a$ zu schreiben. Und diese Produktsumme, durch n dividiert, stellt den Betrag b dar, um den sich der wirkliche Mittelwert vom angenommenen Mittelwert unterscheidet:

$$b = \frac{\Sigma\, p\, a}{n}.$$

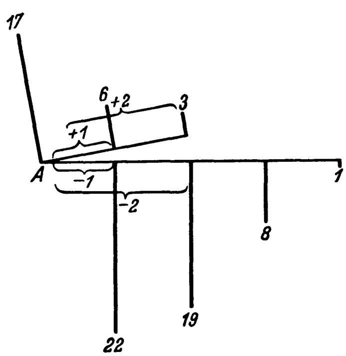

Abb. 9. Umknickung einer Variationsreihe (Abb. 8) um den angenommenen Mittelwert.

Praktische Ausführung der Berechnung des Mittelwertes mittels b.

An Hand der beiden Formeln

1. $b = \dfrac{\Sigma p a}{n}$

2. $M = A + b$

berechnen wir nunmehr den Mittelwert. Wir knicken zu diesem Zweck die Variationsreihe um den angenommenen Mittelwert gleichsam wie um einen Drehpunkt um, so wie es Abb. 9 für unser schematisches Beispiel veranschaulicht. Es kommt dann immer eine „positive" Variantenklasse über eine „negative" zu liegen, deren Klassenwerte zwar voneinander verschieden sind, deren Abweichungen a aber die gleiche Größe besitzen, nur eben mit umgekehrtem Vorzeichen.

Wenn wir die Berechnung wieder an Hand der Zahlen in Tab. 1 durchführen, so können wir beispielsweise $A = 18{,}5$ wählen. Dann kommen durch die Umknickung übereinander die Variantenklasse $V = 19{,}5$

und $V = 17{,}5$, für deren erste $a = +1$ ist, während für die zweite $a = -1$ gilt; weiterhin liegen übereinander die Klassen $V = 20{,}5$ und $V = 16{,}5$, deren a-Werte $+2$ bzw. -2 betragen, usw. So entsteht die folgende Tabelle:

$a =$	1	2	3	4	5	6	7
p +	18	11	7	÷	÷	÷	1
p —	16	10	9	3	1	1	÷
Summe	$+2$	$+1$	-2	-3	-1	-1	$+1$

Wir brauchen nun nicht mehr mit jeder einzelnen Klasse, sondern immer nur mit der Summe je zweier übereinanderstehender Klassen weiterzurechnen. Denn die 16 Individuen mit der Abweichung $a = -1$ werden ja durch ebenso viele Individuen mit der Abweichung $a = +1$ aufgehoben, so daß nur $18 - 16 = 2$ Individuen mit der Abweichung $a = +1$ als Zahlenwert $+2$ in die Rechnung einzugehen brauchen. Wir rechnen also einfach: $+18 - 16 = +2$. Ebenso rechnen wir in den weiteren Doppelklassen: $+11 - 10 = +1$, $+7 - 9 = -2$, $0 - 3 = -3$ usw.

Die Gesamtsumme der Abweichungen vom angenommenen Mittelwert erhalten wir dadurch, daß wir nunmehr die Zahlen der untersten Reihe unserer Tabelle jeweils mit der zugehörigen Zahl $a = 1, 2, 3$ usw. der obersten Reihe multiplizieren und danach die einzelnen Produkte addieren. Dabei schreiben wir die positiven und die negativen Produkte in je eine gesonderte Reihe untereinander, also:

$$\begin{array}{rcr} - & \qquad & + \\ & & +2\cdot 1 = +\ 2 \\ & & +1\cdot 2 = +\ 2 \\ -2\cdot 3 = -\ 6 & & \\ -3\cdot 4 = -12 & & \\ -1\cdot 5 = -\ 5 & & \\ -1\cdot 6 = -\ 6 & & \\ & & +1\cdot 7 = +\ 7 \\ \hline -29 & & +11 \end{array}$$

Linke und rechte Seite zusammengezählt gibt $\Sigma\, p\, a$; in unserem Falle

$$\begin{array}{r} -29 \\ +11 \\ \hline \Sigma p a = -18 \end{array}$$

Dividieren wir diese Zahl durch n, so erhalten wir den Wert für b. Da $n = 100$ ist, so ergibt sich

$$b = \frac{\Sigma p a}{n} = -\frac{18}{100} = -0{,}18.$$

Wir runden diese Zahl 0,18 auf 0,2 ab, da wir ja nur auf Millimeter genau gemessen haben (vgl. S. 1) und eine Berechnung auf hundertstel Millimeter daher eine Genauigkeit vortäuschen würde, die nicht vorhanden ist.

Den Betrag b zählen wir nunmehr, um M zu erhalten, zu A ($= 18{,}5$) hinzu:

$$M = A + b$$
$$M = 18{,}5 + (-0{,}2) = 18{,}5 - 0{,}2$$
$$\mathbf{M = 18{,}3}$$

Kontrollrechnung. Zur Überprüfung der Richtigkeit unserer Rechnung führen wir zweckmäßigerweise eine Kontrollrechnung unter Wahl eines anderen A-Wertes durch.

Setzen wir $A = 17{,}5$, so erhalten wir folgende Tabelle:

a	1	2	3	4	5	6	7	8
+	23	18	11	7	—	—	—	1
—	10	9	3	1	1			
	13	9	8	6	—1	—	—	1

—	+
	$13 \cdot 1 = 13$
	$9 \cdot 2 = 18$
	$8 \cdot 3 = 24$
	$6 \cdot 4 = 24$
$-1 \cdot 5 = -5$	
	$1 \cdot 8 = 8$
-5	$+87$

$$\sum pa = 87 - 5 = +82$$
$$b = +\frac{82}{100} = +0{,}82$$
$$M = A + b = 17{,}5 + 0{,}8 = 18{,}3$$

Wie wir sehen, erspart die von uns geübte Methode der Mittelwert-Berechnung das Rechnen mit großen Zahlen. Denn erstens brauchen wir nun nicht mehr mit den Werten der Variantenklassen selber (z. B. 21,5, 22,5 usw.) zu rechnen, sondern bloß mit den durch kleine Zahlen (1,2 usw.) ausdrückbaren Abweichungen a dieser Varianten vom angenommenen Mittelwert. Zweitens verkleinern wir durch das Umknickverfahren auch die Individuenzahlen, mit denen wir zu operieren haben, und zugleich die Zahl der auszuführenden Multiplikationen. Ferner aber erleichtert uns die eingeübte Methode, wie wir in der folgenden Übung sehen werden, die Gewinnung der wichtigen variationsstatistischen Größe, die wir als Streuung bezeichnen.

Rechnungseinheit und Maßeinheit. Wir führen die abgekürzte Mittelwertberechnung noch an einem weiteren Beispiel (Tab. 5) vor, um dabei einen wichtigen Punkt hervorzuheben, der in Fällen wie dem jetzt zu behandelnden beachtet werden muß.

Tab. 5. Rostrallänge von 99 Exemplaren des Krebses *Palaemonetes varians*. (Nach A. CHRANOWA.)

V	6,25	6,50	6,75	7,00	7,25	7,50	7,75	8,00	8,25	8,50	8,75 mm
p	3	7	6	16	33	20	9	2	2	1	$n = 99$