Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

842

Séminaire Bourbaki vol. 1979/80 Exposés 543 – 560

Avec table par noms d'auteurs de 1967/68 a 1979/80

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York 1981

AMS Subject Classifications (1980): 14E20, 51N35, 16A52, 53A35, 55Q40, 57N00, 47A15, 12B30, 46L50, 58F22, 58E20, 53C00, 58F14, 53C20, 58G25, 22E27, 43A85, 35B65

ISBN 3-540-10292-2 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
ISBN 0-387-10292-2 Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin

Printed in Germany

Printing and binding: Beltz Offsetdruck, Hemsbach/Bergstr.
2141/3140-543210

TABLE DES MATIÈRES

17, 18, 19 novembre 1979

543 DELIGNE, Pierre Le groupe fondamental du complément d'une courbe plane n'ayant que des points doubles ordinaires est abélien [d'après W. Fulton] 1

544 DEMAZURE, Michel Caractérisations de l'espace projectif (conjectures de Hartshorne et de Frankel) d'après Shigefumi Mori 11

545 GABRIEL, Pierre Algèbres auto-injectives de représentation finie [d'après Christine Riedtmann] 20

546 GROMOV, Michaël Hyperbolic manifolds according to Thurston and Jørgensen 40

547 HUSEMOLLER, Dale La décomposition des espaces des lacets et la torsion impaire des groupes d'homotopie [d'après F. Cohen, J.-C. Moore, J. Neisendorfer et P. Selick] 54

548 TOGNOLI, Alberto Algebraic approximation of manifolds and spaces 73

23, 24, 25 février 1980

549 BEAUZAMY, Bernard Sous-espaces invariants dans les espaces de Banach 95

550 CARTIER, Pierre La conjecture locale de Langlands pour GL(2) et la démonstration de Ph. Kutzko 112

551 CONNES, Alain Feuilletages et algèbres d'opérateurs 139

552 DESOLNEUX-MOULIS, Nicole Orbites périodiques des systèmes hamiltoniens autonomes [d'après Clarke, Ekeland-Lasry, Moser, Rabinowitz, Weinstein] 156

553 LEMAIRE, Luc Existence des applications harmoniques et courbure des variétés 174

554 SULLIVAN, Dennis Travaux de Thurston sur les groupes quasi-fuchsiens et les variétés hyperboliques de dimension 3 fibrées sur S^1 196

14, 15, 16 juin 1980

555 BARDOS, Claude Apparition éventuelle de singularités dans des problèmes d'évolution non linéaires [d'après S. Klainerman, B. Glassey, J. Chadam, F. John (et d'autres)] 215

556 BÉRARD-BERGERY, Lionel La courbure scalaire des variétés riemanniennes 225

557 COLIN DE VERDIÈRE, Y. La matrice de scattering pour l'opérateur de Schrödinger sur la droite réelle 246

558 DUFLO, Michel Caractères des groupes de Lie résolubles 257

559 FURSTENBERG, Harry Rigidity and cocycles for ergodic actions of semi-simple Lie groups [after G.A. Margulis and R. Zimmer] 273

560 MEYER, Yves Régularité des solutions des équations aux dérivées partielles non linéaires [d'après J.-M. Bony] 293

Table par noms d'auteurs 303

LE GROUPE FONDAMENTAL DU COMPLÉMENT D'UNE COURBE PLANE N'AYANT QUE DES POINTS DOUBLES ORDINAIRES EST ABÉLIEN

[d'après W. FULTON]

par Pierre DELIGNE

Introduction

THÉORÈME 1.- Soit $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ une courbe plane, dont les seules singularités sont des points doubles à tangentes distinctes. Alors, le groupe fondamental de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) - C$ est abélien.

Ce théorème a été énoncé par Zariski en 1929 ([8]). Voir aussi [9] Ch. VIII. Sa démonstration utilisait le théorème de Severi, selon lequel l'espace des courbes planes irréductibles de degré donné, ayant un nombre donné de points doubles, est irréductible (Vorlesungen über algebraische Geometrie, 1921, Anhang F). On ignore toujours si l'assertion de Severi est vraie ou non.

Le π_1 considéré dans le théorème est le vrai groupe fondamental, celui des topologues. Si $\mathbb{C}$ est remplacé par un corps algébriquement clos k de caractéristique 0 quelconque, le même énoncé vaut pour le groupe fondamental algébrique, celui qui classifie les revêtements étales : le principe de Lefschetz nous ramène à supposer que $k = \mathbb{C}$, auquel cas le groupe fondamental algébrique est le complété profini du vrai groupe fondamental. En caractéristique quelconque, on a la variante :

THÉORÈME 2 (Fulton [3]).- Soient k un corps algébriquement clos et, sur k, $C \subset \mathbb{P}^2$ une courbe plane, dont les seules singularités sont des points doubles à tangentes distinctes. Alors, le groupe fondamental modéré de $\mathbb{P}^2 - C$ est abélien.

En d'autres termes, les revêtements (au sens 0.2) de $\mathbb{P}^2$, ramifiés seulement le long de C, et modérément ramifiés, sont abéliens. Rappelons que le caractère modéré de la ramification se teste après changement de base, de $\mathbb{P}^2$ à ses localisés en les points génériques des composantes irréductibles de C. Ces localisés sont des traits (= spectre d'anneau de valuation discrète).

Supposons k de caractéristique $p > 0$. Si C est comme dans le théorème 2, il existe toujours dans l'espace projectif relatif $\mathbb{P}^2$ sur $\mathrm{Spec}(W(k))$ un diviseur à croisements normaux relatif $\tilde{C}$, dont C se déduise par passage à la fibre spéciale (voir par exemple Mumford, App. au chap. VIII de [9]). Ceci permet de déduire le théorème 2 du théorème 1 par un argument de sécialisation.

Une fois que l'on sait que $\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) - C)$ est abélien, des arguments homologiques donnent immédiatement sa structure : si C est réunion de courbes irréductibles de degrés $d_1,\ldots,d_r$, le groupe $\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) - C)$ est le quotient de $\mathbb{Z}^r$ par le sous-groupe engendré par l'élément $(d_1,\ldots,d_r)$.

Dans sa démonstration du théorème 2, Fulton utilise d'une part des méthodes introduites par Abhyankar [1] pour prouver le cas particulier du théorème 2 où l'on suppose les composantes irréductibles de C lisses - méthodes dont un exposé très clair a été donné ici par Serre ([7]) - d'autre part le théorème 3 ci-dessous. Une analyse de la démonstration a ensuite permis au rédacteur d'en donner une variante qui fournisse le théorème 1.

Abhyankar et Fulton utilisent tous deux des instances du principe selon lequel, en géométrie algébrique, ce qui est très mobile est connexe. Soient $C \subset \mathbb{P}^2$ comme dans le théorème 2, D une composante irréductible de C et $f : X \longrightarrow \mathbb{P}^2$ un revêtement ramifié seulement le long de C, et de ramification modérée. Puisque $D \subset \mathbb{P}^2$ est très mobile, $f^{-1}(D)$ est connexe. Plus précisément, le diviseur $D \subset \mathbb{P}^2$ est ample, le diviseur $f^{-1}(D) \subset X$ l'est donc aussi, puisque f est fini, et on applique Bertini. Par une étude locale de f, Abhyankar montre que, si D est lisse, alors $(f^{-1}(D))_{red}$ l'est aussi, et conclut que $f^{-1}(D)$ est irréductible.

Dans le cas général, soit $g : \tilde{D} \longrightarrow D$ le normalisé de D. La même étude locale montre que le produit fibré réduit $(X \times_{\mathbb{P}^2} \tilde{D})_{red}$ est lisse. C'est donc le normalisé de $f^{-1}(D)$. Si on peut montrer qu'il est connexe, on en déduira que $f^{-1}(D)$ est irréductible, et on peut recopier la fin de la démonstration d'Abhyankar, telle qu'elle figure dans [7].

Rappelons la définition du produit fibré : si $h : X \times \tilde{D} \longrightarrow \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ est le produit des applications $f : X \longrightarrow \mathbb{P}^2$ et $g : \tilde{D} \longrightarrow D \subset \mathbb{P}^2$, le produit fibré $X \times_{\mathbb{P}^2} \tilde{D}$ est l'image inverse $h^{-1}(\Delta)$ de la diagonale. Puisque $\mathbb{P}^2$ a beaucoup d'automorphismes, la diagonale $\Delta \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ est très mobile, et $h^{-1}(\Delta)$ est connexe. Ceci termine la démonstration. Plus précisément, on applique à h le cas particulier $r = 2$, $m = 2$ du théorème suivant :

THÉORÈME 3 (W. Fulton et J. Hansen [4]).- <u>Soient</u> $P = (\mathbb{P}^m)^r$ <u>le produit de</u> r <u>copies de l'espace projectif</u> $\mathbb{P}^m$, δ <u>l'application diagonale de</u> $\mathbb{P}^m$ <u>dans</u> P, $\Delta = \delta(\mathbb{P}^m)$ <u>la diagonale</u>, Z <u>une variété complète irréductible</u>, $h : Z \longrightarrow P$, $n = \dim h(Z)$ <u>et</u> $c = (r-1)m$ <u>la codimension de</u> Δ <u>dans</u> P. <u>Si</u> $n - c \geq 1$, <u>alors</u> $h^{-1}(\Delta)$ <u>est connexe</u>.

Ce théorème a de nombreuses autres applications, pour lesquelles je renvoie à [4], et à l'article de T. Gaffney et R. Lazarsfeld [5].

Dans la fin de cette introduction, nous expliquons sur un exemple la méthode suivie pour transposer la démonstration de Fulton du théorème 2 en une démonstration du théorème 1. L'exemple est : comment transposer les arguments d'Abhyankar pour prouver le théorème 1 dans le cas particulier où C est lisse (donc irréductible).

Soient U un voisinage tubulaire de C dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, $U^* = U - C$ et $u \in U^*$. Pour tout revêtement $f : X \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ ramifié seulement le long de C, on a ($f^{-1}(C)$ connexe) $\Leftrightarrow$ ($f^{-1}(U)$ connexe) $\Leftrightarrow$ ($f^{-1}(U^*)$ connexe) . Le résultat clef : quel que soit le revêtement X, la courbe $f^{-1}(C)$ est connexe, équivaut donc à celui-ci : pour tout quotient fini H de $\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) - C, u)$, le morphisme composé

$$\pi_1(U^*,u) \xrightarrow{j_*} \pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) - C, u) \longrightarrow H$$

est surjectif. Un argument de théorie de Morse permet de prouver mieux : la surjectivité du morphisme $j_* : \pi_1(U^*,u) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) - C, u)$.

Une métrique riemannienne étant choisie sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, on peut, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, prendre pour U l'image par l'application exponentielle exp du sous-fibré en boules de rayon ε du fibré normal de C dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Pour ε assez petit, exp identifie U^* à un fibré en disques épointés orientés sur C, d'où une suite exacte :

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \pi_1(U^*,u) \longrightarrow \pi_1(C,\bar{u}) \longrightarrow 1$$

($\bar{u}$ image de u). L'image de $\mathbb{Z}$ est centrale ; celle de $1 \in \mathbb{Z}$ est représentée par un petit lacet γ tournant une fois, dans le sens positif, autour de C. Puisque j_* est surjectif, γ définit encore un élément central de $\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) - C, u)$. Le quotient de $\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) - C, u)$ par le sous-groupe distingué engendré par γ (en l'occurence, le sous-groupe cyclique engendré par γ) est $\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), u) = \{e\}$ et le cas particulier considéré du théorème s'ensuit.

0. Terminologie

0.1. Connexe signifie connexe et non vide. De même pour irréductible.

0.2. Un revêtement d'un schéma S, supposé normal et connexe, est un morphisme $f : T \longrightarrow S$, de source T normale et connexe, dont la restriction à un ouvert dense de T est étale.

0.3. Dans toute la suite de cet exposé, nous nous plaçons sur $\mathbb{C}$. Nous écrirons simplement $\mathbb{P}^n$ pour $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Les schémas considérés sont tous supposés séparés.

1. Théorèmes du type de Lefschetz et Bertini

Le cas particulier de 1.1, ci-dessous, où $Z \subset \mathbb{P}^n$ est le complément d'une hypersurface est démontré par Hamm et Lê [6], à l'aide de la théorie de Morse. Notre but dans ce § est d'en déduire la variante 1.6 du théorème 3.

Assertion 1.1.- Soit $Z \subset \mathbb{P}^n$ un ouvert de Zariski non vide. Si H est un hyperplan général, le morphisme naturel $\pi_i(Z \cap H) \longrightarrow \pi_i(Z)$ est bijectif pour $i < n-1$, et surjectif pour $i = n-1$.

L'assertion 1.1 est énoncée dans [2], mais la démonstration de Cheniot ne couvre que le cas où le complément de Z est de codimension ≥ 2. Sous cette hypothèse, Z et $Z \cap H$ sont simplement connexes, et il est innocent de travailler, comme il le fait, avec les H_i plutôt qu'avec les π_i. Le cas $i = 1$ peut aussi se déduire de [6] ou [2 bis].

Rappelons que l'adjectif "général", qualifiant un élément H d'une variété algébrique irréductible S (ici, l'espace projectif dual $\mathbb{P}^{n\vee}$), est un quantificateur. Il signifie l'existence d'un ouvert de Zariski non vide (et donc dense) S' de S, tel que pour tout H dans S', ...

1.2.- Soit $Y \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n\vee}$ l'espace des couples (z,H) tels que $z \in Z$ et $z \in H$. Le théorème d'isotopie, appliqué à la seconde projection $pr_2 : Y \longrightarrow \mathbb{P}^{n\vee}$, fournit l'existence d'un ouvert de Zariski non vide U de $\mathbb{P}^{n\vee}$, au-dessus duquel Y est un espace fibré - topologiquement localement trivial. Il suffit de prendre pour U l'ensemble des hyperplans transverses aux strates d'une stratification de Whithney algébrique du complément de Z dans $\mathbb{P}^n$. Localement sur U, et si on choisit une trivialisation locale de ce fibré, l'inclusion de $Z \cap H = pr_2^{-1}(\{H\})$ dans Z apparaît comme une application dépendant continûment de H d'un espace fixe dans Z. La conclusion de 1.1 ne peut donc valoir pour un H dans U que si elle vaut pour tous, et 1.1 équivaut à dire qu'elle vaut pour tout H dans U.

Supposons que Z dépende de paramètres : on se donne un schéma irréductible S, un ouvert Z de $S \times \mathbb{P}^n$, on pose $pr_2 pr_1^{-1}(\{s\}) = Z(s)$ et on suppose chaque $Z(s)$ non vide. Soit $Y \subset S \times \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n\vee}$ l'espace des triples (s,z,H) tels que $z \in Z(s)$ et $z \in H$. Le théorème d'isotopie, appliqué à la projection de Y sur $S \times \mathbb{P}^{n\vee}$ (resp. de Z sur S), fournit l'existence d'un ouvert de Zariski non vide U de $S \times \mathbb{P}^{n\vee}$ (resp. V de S), au-dessus duquel Y (resp. Z) est un espace fibré - topologiquement local trivial.

Comme ci-dessus, si $s \in V$ et que $(s,H) \in U$, la conclusion de 1.1 vaut pour $Z(s)$ et H. Cette variante - avec paramètres - de 1.1 sera utilisée implicitement dans la preuve de 1.4.

Je conjecture que, plus généralement :

Conjecture 1.3.- Soient Z lisse et connexe, de dimension n, $f : Z \longrightarrow \mathbb{P}^N$ un morphisme à fibres finies, c un entier, J un sous-espace linéaire de $\mathbb{P}^N$, de *codimension* c *et* $n^* = n - c$. *Choisissons une métrique riemannienne sur* $\mathbb{P}^N$, *et soit* $V(\varepsilon)$ *l'ensemble des points* p *de* $\mathbb{P}^N$ *tels que* $d(p,L) < \varepsilon$. *Alors, pour* ε *assez petit, le morphisme naturel*

$$\pi_i(f^{-1}(V(\varepsilon))) \longrightarrow \pi_i(Z)$$

est bijectif pour $i < n^*$, *et surjectif pour* $i = n^*$.

On notera que pour L général, l'inclusion de $f^{-1}(L)$ dans $f^{-1}(V(\varepsilon))$ est, pour ε assez petit, une équivalence d'homotopie : 1.3 est bien une généralisation de 1.1.

Si on ne suppose plus f quasi-fini, et que l'ensemble des points de $\mathbb{P}^N$ où la fibre de f est de dimension k est de dimension $\varphi(k)$, il y a lieu de redéfinir n^* comme étant $n^* = 2 \dim Z - \sup_k(2k + \varphi(k) + \inf(\varphi(k), c-1)) - 1$.

La conjecture 1.3 devrait par ailleurs se déduire d'un énoncé plus précis, comme quoi Z se déduit de $f^{-1}(V(\varepsilon))$ par adjonction d'anses tuant des sphères de dimension $\geq n^*$.

Nous nous contenterons de résultats plus faibles que 1.3. Nous les déduirons du cas particulier de 1.1 où Z est le complément d'une hypersurface.

Lemme 1.4.- *Soient* Z *normal et connexe,* $f : Z \longrightarrow \mathbb{P}^N$ *un morphisme,* n *la dimension de* $f(Z)$ *et* c *un entier. On suppose que* $n-c \geq 1$. *Si* L *est un sous-espace linéaire de codimension* c *général de* $\mathbb{P}^N$, *alors* $f^{-1}(L)$ *est connexe et, pour* $z \in f^{-1}(L)$, *le morphisme naturel de* $\pi_1(f^{-1}(L),z)$ *dans* $\pi_1(Z,z)$ *est surjectif.*

Il est loisible de remplacer Z par un ouvert de Zariski non vide Z' : pour L général, $f^{-1}(L)$ est encore normal, et Z' (resp. $Z' \cap f^{-1}(L)$) se déduit de Z (resp. $f^{-1}(L)$) par soustraction d'une partie algébrique d'intérieur vide. Vu l'hypothèse de normalité, ceci ne change pas les π_0 , ne peut qu'augmenter le π_1 et on contemple le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(Z' \cap f^{-1}(L), z) & \twoheadrightarrow & \pi_1(f^{-1}(L), z) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(Z', z) & \twoheadrightarrow & \pi_1(Z, z) \end{array} .$$

En particulier, on peut supposer, et on suppose, que Z est lisse. Le lecteur intéressé seulement par la preuve du théorème 1 aurait d'ailleurs pu le supposer d'emblée ; il remplacera "normal" par "lisse" dans la suite du §.

Rétrécissant Z , on peut supposer, et on suppose, que $f(Z)$ est localement fermé et que Z est un espace fibré - topologiquement localement trivial - sur $f(Z)$. Si $c = 1$ et que f est dominant, $f(Z)$ est un ouvert de Zariski de $\mathbb{P}^N$ - rétrécissant Z , on peut supposer que c'est le complément d'une hypersurface - et il ne reste qu'à appliquer 1.1 à $f(Z)$, et à comparer les suites exactes longues d'homotopie pour $Z \longrightarrow f(Z)$ et $f^{-1}(L) \longrightarrow L \cap f(Z)$.

Continuons à supposer que $c = 1$. Si f n'est pas dominant, soient A un sous-espace linéaire de dimension $N-n-1$, B l'espace projectif des sous-espaces linéaires de dimension $N-n$ contenant A et $q : \mathbb{P}^N - A \longrightarrow B : x \longmapsto$ le sous-espace le contenant. Pour A disjoint de $f(Z)^-$, la restriction de q à $f(Z)^-$ est un morphisme fini, donc dominant puisque $\dim f(Z)^- = \dim B$, et $qf : Z \longrightarrow B$ est dominant. Du lemme, appliqué à qf et à $c = 1$, on déduit la conclusion du lemme pour L un hyperplan général parmi ceux contenant A . Le sous-espace A étant seulement assujetti à se trouver dans un ouvert dense d'une grassmannienne convenable, la conclusion du lemme vaut aussi pour L général (cf. 1.2).

On finit la démonstration par une récurrence sur c : un sous-espace linéaire général de codimension $c-1$ d'un hyperplan général est un sous-espace linéaire de codimension c général (cf. 1.2).

<u>Lemme</u> 1.5.- <u>Soient</u> Z , f, n <u>et</u> c <u>comme en</u> 1.4. <u>Tout sous-espace linéaire</u> L <u>de codimension</u> c <u>de</u> $\mathbb{P}^N$ <u>admet un système fondamental de voisinages ouverts</u> V <u>tels que</u> $f^{-1}(V)$ <u>soit connexe, et que, pour</u> $z \in f^{-1}(V)$, <u>le morphisme naturel de</u> $\pi_1(f^{-1}(V), z)$ <u>dans</u> $\pi_1(Z,z)$ <u>soit surjectif</u>.

Soient Gr la grassmannienne des sous-espaces linéaires de codimension c de $\mathbb{P}^N$, $Y \subset Z \times Gr$ l'ensemble des couples (z,L) tels que $f(z) \in L$, et G un ouvert de Zariski non vide de Gr tel que, au-dessus de G , Y soit un fibré - topologiquement localement trivial. La conclusion de 1.4 vaut alors pour $L \in G$ (cf. 1.2). Pour chaque ouvert U de Gr , nous noterons U^* l'ouvert de $\mathbb{P}^N$ réunion des $L \in U$. Nous allons prouver que si U est connexe, la conclusion de 1.5 vaut pour $V = U^*$. Le lemme en suivra.

Prouvons que, si U est connexe, $f^{-1}(U^*)$ l'est aussi. L'intersection $U' = U \cap G$ est connexe, car déduite de U par soustraction d'une partie (triangulable) de codimension réelle ≥ 2 . D'après 1.4, la réunion $f^{-1}(U'^*)$ des $f^{-1}(L)$ pour $L \in U'$ est donc connexe. Nous allons montrer qu'elle est dense dans $f^{-1}(U^*)$.

L'image $f(Z)$ de Z n'est pas dans le complément F de G^* : puisque $n-c \geq 0$, les $L \in G$ rencontrent $f(Z)$. Si $z \in Z$, l'image d'un quelconque voisinage de z n'est pas dans F , sinon celle de Z le serait, par prolongement analytique. Si $z \in f^{-1}(U^*)$, il existe donc arbitrairement près un point z' tel que $f(z') \in G^*$. Dans l'ensemble des $L \in Gr$ contenant z' , la trace de G est dense, puisque non vide. Si $z \in f^{-1}(L)$, avec $L \in U$, ceci permet de trouver z' comme ci-dessus, contenu dans un $f^{-1}(L')$, avec L' dans G arbitrairement proche de L . En particulier, on peut prendre $L' \in U'$, auquel cas $z' \in f^{-1}(U'^*)$. Ceci prouve la densité de $f^{-1}(U'^*)$ dans $f^{-1}(U^*)$, et la connexité de $f^{-1}(U^*)$.

Soit enfin $L \in U'$. On a $f^{-1}(L) \subset f^{-1}(U^*) \subset Z$. D'après 1.4, le π_1 de $f^{-1}(L)$ s'envoie <u>sur</u> celui de Z . A fortiori celui de $f^{-1}(U^*)$.

Nous allons en déduire une variante du théorème 3.

THÉORÈME 1.6.- *Soient* $P = (\mathbb{P}^m)^r$ *le produit de* r *copies de l'espace projectif* $\mathbb{P}^m$, δ *l'application diagonale de* $\mathbb{P}^m$ *dans* P, $\Delta = \delta(\mathbb{P}^m)$ *la diagonale,* Z *normal et connexe,* $h : Z \longrightarrow P$, $n = \dim h(Z)$ *et* $c = (r-1)m$ *la codimension de* Δ *dans* P. *Si* $n - c \geq 1$, Δ *admet un système fondamental de voisinages ouverts* V, *tels que* $h^{-1}(V)$ *soit connexe. Si* $h^{-1}(V)$ *est connexe, et que* $z \in h^{-1}(V)$, *le morphisme naturel de* $\pi_1(h^{-1}(V), z)$ *dans* $\pi_1(V,z)$ *est surjectif.*

Comme en 1.4, il est loisible de rétrécir Z, et en particulier de supposer Z lisse. Supposons-le. Soit $(H_\alpha)_{0 \leq \alpha \leq m}$ une famille d'hyperplans de $\mathbb{P}^m$, telle que

a) l'intersection de H_α est vide : dans un système de coordonnées projectives convenable (X_α), ils s'écrivent $X_\alpha = 0$;

b) $h(Z)$ n'est contenu dans aucun des $pr_i^{-1}(H_\alpha)$. Rétrécissant Z, on peut alors supposer - et on suppose - que $h(Z)$ est disjoint des $pr_i^{-1}(H_\alpha)$.

c) $h(Z)^- \cap \Delta$ n'est pas contenu dans la réunion des $\delta(H_\alpha)$: puisque Δ est membre d'une famille connexe de cycles remplissant P tout entier, on a $h(Z)^- \cap \Delta \neq \emptyset$, et il est possible de choisir des H_α vérifiant c).

Soient $A_\alpha = \mathbb{P}^m - H_\alpha$, $B_\alpha = A_\alpha^r \subset P$ et $\Delta_\alpha = \delta(A_\alpha)$ la diagonale de B_α. Les espaces A_α et B_α sont des espaces affines et Δ_α est un sous-espace affine de B_α. La complétion projective de A_α est $\mathbb{P}^m$. Notons $\bar{B}_\alpha$ celle de B_α, et $\bar{\Delta}_\alpha \subset \bar{B}_\alpha$ celle de Δ_α.

Fixons α, et écrivons simplement H, A, B, Δ_A, $\bar{B}$, $\bar{\Delta}_A$ pour H_α, A_α, B_α, Δ_α, $\bar{B}_\alpha$ et $\bar{\Delta}_\alpha$.

Lemme 1.7.- *Pour tout voisinage* U *de* $\Delta \subset P$, *il existe un voisinage* V *de* $\bar{\Delta}_A$ *dans* $\bar{B}$ *tel que* $V \cap B \subset U \cap B$.

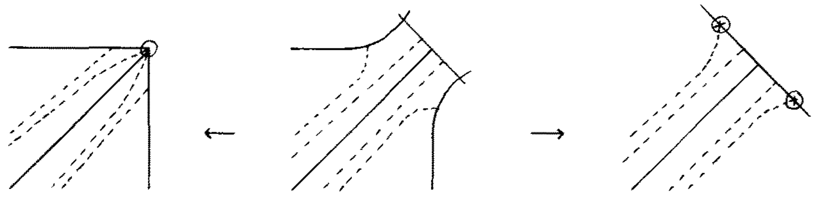
Choisissons sur A une structure d'espace vectoriel hermitien, compatible à sa structure affine. Un système fondamental de voisinages U de Δ (resp. V de $\bar{\Delta}_A$) admet alors pour trace sur B les ensembles de la forme suivante :

$U \cap B = \{(x_i) |$ Si $|x_i| \leq R$ pour un i, on a $\forall j\ \forall k\ |x_j - x_k| < \varepsilon$; si les $|x_i|$ sont $\geq R$, on a $\forall j\ \forall k$ l'angle entre les droites complexes engendrées par x_j et x_k est $< \varepsilon\}$

$V \cap B = \{(x_i) |$ Si $|x_i| \leq R$ pour un i, on a $\forall j\ \forall k\ |x_j - x_k| < \varepsilon$; si les $|x_i|$ sont $\geq R$, on a $\forall j\ \forall k\ |x_j - x_k| \leq \varepsilon \inf(|x_i|)\}$

Le lemme en résulte.

Dans le cas où $r = m = 1$, les deux compactifications $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ et $\mathbb{P}^2$ de A^2 sont coiffées par une troisième comme suit : le dessin représente le lieu à l'infini, et la diagonale ; les points entourés sont ceux qu'il faut éclater pour obtenir la troisième compactification ; U et V sont suggérés par les pointillés :



$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{P}^2$

Une construction similaire peut être faite pour r et m quelconques.

Reprenons la preuve de 1.6. Appliquons 1.5 à $h : Z \longrightarrow \overline{B}_\alpha$ et à $\overline{\Delta}_\alpha$. On trouve que $\overline{\Delta}_\alpha$ admet un voisinage ouvert arbitrairement petit V_α tel que $h^{-1}(V_\alpha) = h^{-1}(V_\alpha \cap B_\alpha)$ soit connexe, de π_1 s'envoyant sur celui de Z. D'après 1.7, quel que soit le voisinage U de Δ dans P, on peut prendre V_α tel que $V_\alpha \cap B_\alpha \subset U$.

La réunion V des ouverts $V_\alpha \cap B_\alpha$ de P est un voisinage, arbitrairement petit de Δ. L'hypothèse b) sur les H_α assure que l'intersection des $V_\alpha \cap B_\alpha$ rencontre $h(Z)$. Dès lors, $h^{-1}(V)$, réunion des ouverts connexes $h^{-1}(V_\alpha)$, d'intersection non vide, est connexe. Puisque le π_1 de l'un des $h^{-1}(V_\alpha)$ s'envoie sur celui de Z, a fortiori celui de $h^{-1}(V)$, et ceci achève la démonstration.

2. Preuve du théorème 1

2.1.- Soient $C \subset \mathbb{P}^2$ une courbe plane réduite, D une composante irréductible de C, $C' = (C - D)^-$ la réunion des autres composantes, $\mathrm{Sing}(C)$ l'ensemble des points singuliers de C et $D^* = D - \mathrm{Sing}(C)$. Choisissons un point base $O \in \mathbb{P}^2 - C$, et soit γ un lacet dans $\mathbb{P}^2 - C$ du type suivant : γ va de O à un point p' proche d'un point p de D^* par un chemin ch, tourne une fois autour de D^* dans le sens positif, et revient à O par ch^{-1}. La courbe D^* étant connexe, les lacets de ce type sont tous conjugués entre eux. Le quotient de $\pi_1(\mathbb{P}^2 - C, O)$ par le sous-groupe distingué qu'ils engendrent est $\pi_1(\mathbb{P}^2 - C')$.

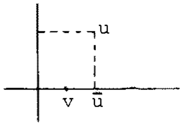
PROPOSITION 2.2.- <u>Supposons que ceux des points singuliers de</u> C <u>qui sont sur</u> D <u>sont des points doubles à tangentes distinctes</u>. <u>Alors</u>, γ <u>est central dans</u> $\pi_1(\mathbb{P}^2 - C, O)$.

Soient j l'inclusion de $\mathbb{P}^2 - C$ dans $\mathbb{P}^2$, $g : \tilde{D} \longrightarrow D$ la normalisée de D et appliquons 1.6 à

$$h = j \times g : (\mathbb{P}^2 - C) \times \tilde{D} \longrightarrow \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 .$$

Pour présenter commodément l'image inverse de certains voisinages de la diagonale, nous choisissons sur $\mathbb{P}^2$ une structure riemannienne telle que, au voisinage de chaque point $P \in D \cap \mathrm{Sing}(C)$, $\mathbb{P}^2$ soit euclidien, et que les deux branches de C par P soient des 2-plans (réels) orthogonaux.

Si $(u,v) \in (\mathbb{P}^2 - C) \times \tilde{D}$ est dans l'image inverse d'un voisinage assez petit de la diagonale, i. e. si u et v sont assez proches, le point u est près de D , et on peut abaisser une courte perpendiculaire de u sur D . Pour u près de $\mathrm{Sing}(D)$, on en a même deux, une par branche. On choisit celle dont le pied $\bar{u}$ est proche de v sur $\tilde{D}$:



Le point $\bar{u}$ est dans D^* .

Réciproquement, soient $\varepsilon > 0$ assez petit, $q : U^* \longrightarrow D^*$ le sous-fibré en disques épointés du fibré normal de D^* dans $\mathbb{P}^2$ formé des vecteurs normaux non nuls de longueur $< \varepsilon$, et E l'ensemble des couples (x,v) avec $x \in U^*$, $v \in \tilde{D}$ et $d(q(x),v) < \varepsilon$ (distance calculée sur $\tilde{D}$). L'application $pr_1 : E \longrightarrow U^*$ est une équivalence d'homotopie et admet pour section l'espace des $(x,q(x))$. L'application $\exp : (x,v) \longmapsto (\exp(x),v)$ de E dans $(\mathbb{P}^2 - C) \times \tilde{D}$ identifie E à l'image inverse d'un voisinage de Δ , et, pour $\varepsilon \longrightarrow 0$, on obtient les images inverses d'un système fondamental de voisinage. Appliquant 1.6, on trouve que, quel que soit $0 \in U^*$, $\exp$ et q induisent une surjection

$(\exp , q)_* : \pi_1(U^*,0) \twoheadrightarrow \pi_1(\mathbb{P}^2 - C , \exp(0)) \times \pi_1(\tilde{D} , q(0))$.

On dispose d'une suite exacte d'homotopie

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \pi_1(U^*,0) \longrightarrow \pi_1(D^* , q(0)) \longrightarrow 1 .$$

L'image de $\mathbb{Z}$ est centrale ; celle de $1 \in \mathbb{Z}$ est représentée par un petit lacet tournant une fois, dans le sens positif, autour de D^* . Puisque $(\exp , q)_*$, donc $\exp_* : \pi_1(U^*,0) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{P}^2 - C , \exp(0))$ est surjectif, ce lacet définit encore un élément central de $\pi_1(\mathbb{P}^2 - C , \exp(0))$. C'est γ .

2.3 <u>Preuve du théorème</u> 1 : Pour chaque composante irréductible D de C , soit $\gamma(D)$ l'élément central correspondant de $\pi_1(\mathbb{P}^2 - C , 0)$. Le quotient de $\pi_1(\mathbb{P}^2 - C , 0)$ par le sous-groupe - central - engendré par les $\gamma(D)$ est $\pi_1(\mathbb{P}^2, 0) = \{e\}$. Le théorème en résulte.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. ABHYANKAR - *Tame coverings and fundamental groups of algebraic varieties I*, Amer. J. of Math., 81 (1959), 46-94.

[2] D. CHENIOT - *Un théorème du type de Lefschetz*, Annales de l'Institut Fourier, 25 1 (1975), 195-213.

[2 bis] D. CHENIOT - *Une démonstration du théorème de Zariski sur les sections hyperplanes d'une hypersurface projective et du théorème de Van Kampen sur le groupe fondamental du complémentaire d'une courbe plane*, Comp. Math., 27 2 (1973), 141-158.

[3] W. FULTON - *On the fundamental group of the complement of a node curve*, Ann. of Math., 111 2 (1980), 407-409.

[4] W. FULTON and J. HANSEN - *A connectedness theorem for projective varieties, with applications to intersections and singularities of mappings*, Ann. of Math., 109 1 (1979), 159-166.

[5] T. GAFFNEY and R. LAZARSFELD - *On the ramification of branched coverings of* $\mathbb{P}^n$, Inv. Math., 59 1 (1980), 53-58.

[6] H. HAMM et LÊ DŨNG TRANG - *Un théorème de Zariski du type de Lefschetz*, Ann. Sci. E.N.S., 6 3 (1973), 317-366.

[7] J.-P. SERRE - *Revêtements ramifiés du plan projectif (d'après S. Abhyankar)*, Sém. Bourbaki 204, mai 1960.

[8] O. ZARISKI - *On the problem of existence of algebraic functions of two variables possessing a given branch curve*, Amer. J. of Math., 51 (1929), 305-328.

[9] O. ZARISKI - *Algebraic surfaces*, second supplemented edition, Ergebnisse 61, Springer-Verlag.

Je viens (1/10/80) de recevoir un très bel exposé, faisant le point sur les méthodes étudiées ici, leurs variantes et leurs nombreuses applications : W. FULTON and R. LAZARSFELD - *Connectivity and its applications in algebraic geometry.*

Pierre DELIGNE

Institut des Hautes Etudes
Scientifiques
35 route de Chartres
F-91440 BURES-SUR-YVETTE

CARACTÉRISATIONS DE L'ESPACE PROJECTIF (CONJECTURES DE HARTSHORNE ET DE FRANKEL)

d'après Shigefumi MORI [6].

par Michel DEMAZURE

§ 1. Les énoncés.

THÉORÈME 1 ("Conjecture de Hartshorne") .- Soient k un corps algébriquement clos, X une variété algébrique définie sur k, projective, lisse et irréductible. Si le fibré tangent à X est ample, X est isomorphe à l'espace projectif $\mathbb{P}_k^n$, $n = \dim(X)$.

THÉORÈME 2 ("Conjecture de Frankel") .- Soit V une variété kaehlérienne compacte connexe. Si la courbure bisectionnelle holomorphe de V est > 0, V est isomorphe à l'espace projectif $\mathbb{CP}^n$, $n = \dim_{\mathbb{C}}(V)$.

Ce qu'il faut savoir sur les fibrés vectoriels amples pour comprendre le théorème 1 est rappelé au § 2 ; au § 3, on explique les rapports entre l'amplitude et la courbure, et on déduit le théorème 2 du théorème 1 ; au § 7, on donne des détails complémentaires sur le théorème 2.

Le reste de l'exposé est consacré à la démonstration donnée par Mori du théorème 1. Le point central de cette démonstration est l'étude des morphismes de $\mathbb{P}_k^1$ dans X ; elle est valable en toutes caractéristiques et un passage essentiel utilise une réduction modulo p.

Le théorème 1 est élémentaire lorsque $n = 1$; on peut le démontrer par les moyens du bord lorsque $n = 2$ (R. Hartshorne [3]), le cas $n = 3$ a été traité par T. Mabuchi, S. Mori et H. Sumihiro ([5] et [7]) ; le cas général est dû à S. Mori; voir le § 7 en ce qui concerne l'historique du théorème 2.

On désigne par k un corps algébriquement clos, et on écrit $\mathbb{P}^n$ au lieu de

$\mathbb{P}_k^n$, etc. On appelle courbes d'une variété algébrique projective les sous-variétés fermées qui sont des courbes (donc des courbes complètes).

§ 2. Fibrés vectoriels amples.

Soit X une variété algébrique sur k. Un fibré en droites $L \to X$ est dit très ample s'il existe des sections $s_0, \dots, s_n$ de L sur X telles que $x \mapsto (s_0(x) : \dots : s_n(x))$ soit un plongement de X dans l'espace projectif $\mathbb{P}^n$. On dit que L est ample si une puissance tensorielle convenable $L \otimes \dots \otimes L$ est très ample.

Soit maintenant $E \to X$ un fibré vectoriel. Notons $P^\bullet(E)$ le fibré projectif dont l'espace total est l'ensemble des hyperplans des fibres de E (c'est le P(E) des géomètres algébristes), et $L^\bullet(E)$ le fibré en droites sur $P^\bullet(E)$ dont la fibre au-dessus du point $H \subset E_x$ est la droite E_x/H. Notons de même $P_\bullet(E)$ le fibré projectif dont l'espace total est l'ensemble des droites des fibres de E (c'est le P(E) des géomètres différentiels), et $L_\bullet(E)$ le fibré en droites canonique. Naturellement, $P_\bullet(E)$ s'identifie à $P^\bullet(E^*)$ et $L_\bullet(E)$ au dual de $L^\bullet(E^*)$. On dit avec Hartshorne ([2]) que E est ample si $L^\bullet(E)$ est ample sur la variété $P^\bullet(E)$; lorsque E est un fibré en droites, $P^\bullet(E)$ s'identifie à X et $L^\bullet(E)$ à E.

Des propriétés connues des fibrés en droites amples, on déduit plus ou moins aisément (voir [2]) :

a) tout quotient d'un fibré vectoriel ample est ample ;

b) une somme directe de fibrés amples est ample ;

c) la restriction d'un fibré ample à une sous-variété est ample ;

d) si E est ample et de rang r, le fibré en droites $\Lambda^r E$ est ample ;

e) soient C une courbe réduite, $f : \tilde{C} \to C$ sa normalisation et E un fibré vectoriel sur C ; alors E est ample si et seulement si $f^* E$ est ample.

Donnons deux exemples fondamentaux :

f) prenons $X = \mathbb{P}^n = P^\bullet(k^{n+1} \to \bullet)$, et notons traditionnellement $\mathcal{O}(1)$ le fibré en droites canonique $L^\bullet(k^{n+1} \to \bullet)$; alors $\mathcal{O}(1)$ est par définition (très) ample, ainsi que ses puissances tensorielles $\mathcal{O}(k)$, $k > 0$. On a une suite exacte de fibrés vectoriels

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}(1)^{n+1} \longrightarrow T_X \longrightarrow 0 \quad ,$$

et le fibré tangent à X est ample d'après a) et b).

g) prenons $X = \mathbb{P}^1$. D'après Grothendieck, tout fibré vectoriel E sur X est somme directe de fibrés en droites, donc est isomorphe à

$$\mathcal{O}(n_1) \oplus \mathcal{O}(n_2) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(n_r) \quad ,$$

pour une suite d'entiers $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_r$, $r = \operatorname{rg} E$, uniquement déterminée. D'après a) et b), E est ample si et seulement si $n_r > 0$. On notera en passant que $\deg(E) = \deg(\Lambda^r E) = n_1 + \cdots + n_r$, donc que $\deg(E) \geq r$ si E est ample.

§ 3. Fibrés amples et courbure.

Soient V une variété analytique complexe de dimension n, E un fibré vectoriel holomorphe de rang r sur V et h une métrique hermitienne sur E. Il existe sur E une unique connexion $(X,s) \mapsto \nabla_X s$ (X champ de vecteurs sur V, s section de E) telle que : 1) $\nabla_X s = 0$ si X est de type (0,1) et s holomorphe, 2) la métrique hermitienne h de E est parallèle. Elle est donnée par $\langle s_1, \nabla_X s_2 \rangle = X \cdot \langle s_1, s_2 \rangle$ pour s_1 et s_2 holomorphes. La forme de courbure correspondante est de type (1,1) et à valeurs dans le fibré en algèbres de Lie $\underline{u}(E)$; en coordonnées locales holomorphes, elle a des composantes $R_{\alpha\bar{\beta}i\bar{j}}$; $\alpha, \beta = 1, \ldots, n$; $i, j = 1, \ldots, r$. On dit que (E,h) est à courbure > 0 (resp. < 0) si $-\Sigma R_{\alpha\bar{\beta}i\bar{j}}\, \xi^\alpha \bar{\xi}^\beta u^i \bar{u}^j$ est > 0 (resp. < 0) pour $(\xi^\alpha) \neq (0)$, $(u^i) \neq (0)$.

PROPOSITION 1 .- *Si le fibré vectoriel holomorphe E sur V possède une métrique hermitienne à courbure > 0, il en est de même du fibré en droites $\Lambda^r E$ sur V et du fibré en droites $L^\bullet(E)$ sur $P^\bullet(E)$.*

La première assertion se démontre par un calcul immédiat. Par ailleurs, $P^\bullet(E)$ s'identifie au fibré $P_\bullet(E^*)$ des droites de E^* et $L^\bullet(E)$ au dual du fibré naturel $L_\bullet(E^*)$ sur $P_\bullet(E^*)$. Le complémentaire de la section nulle de E^* s'identifie au complémentaire de la section nulle de $L_\bullet(E^*)$. De la métrique h^* sur E^* duale de la métrique donnée sur E, on déduit alors une métrique $\tilde{h}^*$ sur $L_\bullet(E^*)$. Mais h^* est à courbure < 0 et on vérifie ([4], proposition 6.3) que cela implique que $\tilde{h}^*$ est à courbure < 0 ; la métrique duale sur $L^\bullet(E)$ est alors à courbure > 0.

PROPOSITION 2 .- *Supposons que V soit compacte et que E possède une métrique hermitienne à courbure > 0. Alors V est projective, donc algébrique, E est algébrique, et le fibré algébrique $E \to V$ est ample.*

D'après la proposition 1, le fibré $\Lambda^r E$ est à courbure > 0. Le théorème de plongement de Kodaira implique alors que les sections d'une puissance tensorielle convenable de $\Lambda^r E$ permettent de plonger V dans un espace projectif. Donc V est algébrique (Chow), et E est algébrique (Serre). De nouveau d'après la proposition 1 et le théorème de Kodaira, $L^\bullet(E)$ est ample sur $P^\bullet(E)$, donc E est ample.

Nous pouvons maintenant déduire le théorème 2 du théorème 1. Soit donc V une variété kæhlérienne compacte connexe ; son fibré tangent T_V est muni d'une structure hermitienne canonique h, et dire que (T_V, h) est à courbure > 0 signifie exactement que V est à courbure bisectionnelle holomorphe > 0. D'après la proposition 2, V est alors algébrique projective et T_V ample ; le théorème 1 permet alors de conclure.

Remarquons d'ailleurs que la courbure bisectionnelle holomorphe est > 0 dès que la courbure sectionnelle riemannienne usuelle est > 0, et donc que le théorème 2 s'applique au cas où la courbure sectionnelle de V est > 0.

§ 4. Espaces de courbes.

Retournons au cas d'un corps de base général k algébriquement clos.

Soient X une variété projective et lisse de dimension n, C une courbe projective lisse et irréductible, de genre g, D un diviseur positif sur C, considéré comme un sous-schéma fini de C et $i : D \to X$ un morphisme. D'après Grothendieck, il existe un schéma paramétrisant les morphismes de C dans X, donc aussi un schéma (sous-schéma fermé du précédent) $\mathrm{Mor}(C,X;i)$ paramétrisant les morphismes de C dans X prolongeant i.

Notons T_X le fibré tangent à X, $K_X^* = \Lambda^n T_X$ son fibré en droites anticanonique et soit $f : C \to X$ un point rationnel de $M = \mathrm{Mor}(C,X;i)$. On pose $(f(C) \cdot K_X^*) = \deg_C(f^* K_X^*)$.

PROPOSITION 3 .- a) <u>L'espace tangent à M au point f s'identifie à</u> $H^0(C, f^* T_X \otimes \mathcal{O}(-D))$.

b) <u>La dimension de M au point f est au moins égale à</u> $n(1 - g - \deg(D)) + (f(C) \cdot K_X^*)$.

c) <u>Si</u> $H^1(C, f^* T_X \otimes \mathcal{O}(-D)) = 0$, <u>le schéma M est lisse en f de dimension</u> $n(1 - g - \deg(D)) + (f(C) \cdot K_X^*)$.

Les techniques usuelles de calcul infinitésimal montrent que l'espace tangent de M en f s'identifie à $H^0(C, f^* T_X \otimes \mathcal{O}(-D))$, tandis que les obstructions aux prolongements de déformations se trouvent dans $H^1(C, f^* T_X \otimes \mathcal{O}(-D))$. Par ailleurs,

---

♦ C'est le moment de dire que les conventions de signe sur la forme de courbure ont été choisies pour qu'il en soit ainsi !

$$h^o(f^* T_X \otimes \mathcal{O}(-D)) - h^1(f^* T_X \otimes \mathcal{O}(-D)) = \chi(f^* T_X \otimes \mathcal{O}(-D))$$

$$= n(1-g) + \deg \Lambda^r(f^* T_X \otimes \mathcal{O}(-D)) = n(1-g) + (f(C) \cdot K_X^*) - n \deg (D) \quad .$$

On conclut alors à la façon usuelle. Voir [6], § 1, pour une démonstration détaillée d'un énoncé plus général.

§ 5. Existence de courbes rationnelles.

Le premier résultat fondamental de l'article de Mori est :

THÉORÈME 3 .- Soit X une variété projective et lisse, de dimension $n > 0$, dont le fibré anticanonique K_X^* est ample. Alors X possède une courbe rationnelle C telle que $(C \cdot K_X^*) \leq n+1$.

1er pas : Si X possède une courbe rationnelle C avec $(C \cdot K_X^*) > n+1$, elle possède une courbe rationnelle C_1 avec $(C_1 \cdot K_X^*) < (C \cdot K_X^*)$.

Soient x et y deux points rationnels de $\mathbb{P}^1$ et $f : \mathbb{P}^1 \to C$ un morphisme envoyant x et y sur deux points lisses et distincts de C. Considérons le schéma $M = \mathrm{Mor}(\mathbb{P}^1, X; i)$ avec $i = f|\{x,y\}$. On a $\dim_f M \geq -n + (C \cdot K_X^*) > 1$ (proposition 3), tandis que l'orbite de f sous le stabilisateur de $\{x,y\}$ dans $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ est au plus de dimension 1 ; il existe donc une courbe lisse D et un morphisme $\alpha : D \to M$ dont l'image contient f et n'est pas contenue dans cette orbite. Notons $\overline{D}$ une compactification de D et $\varphi : \mathbb{P}^1 \times D \to X \times \overline{D}$ le morphisme $(z,d) \to (\alpha(d)z, d)$, et soit S la normalisée de la surface $\overline{\varphi(\mathbb{P}^1 \times D)}$. Les fibres générales de $S \to \overline{D}$ sont isomorphes à $\mathbb{P}^1$; de l'existence des deux sections $\overline{D} \to S$ associées aux points x et y, et qui se contractent par le morphisme naturel de S dans X, Mori déduit que $S \to \overline{D}$ possède des fibres singulières, qui sont donc réunion de courbes rationnelles. Cela entraîne l'existence d'une déformation de C, réunion de courbes rationnelles $C_1, \ldots, C_m$, $m \geq 2$. On a $(C \cdot K_X^*) = \Sigma (C_i \cdot K_X^*) > (C_1 \cdot K_X^*)$ (puisque K_X^* est ample), d'où le résultat annoncé.

2ème pas : Si k est de caractéristique $p \neq 0$, X possède une courbe rationnelle.

Soit Y une courbe irréductible sur X ; on a $(Y \cdot K_X^*) > 0$. Soient $g : \tilde{Y} \to Y$ la normalisation de Y, q une puissance de p, et $F^q : \tilde{Y}^{(q)} \to \tilde{Y}$ le morphisme de Frobenius. Posons $\tilde{Y}^{(q)} = C$ et notons $f : C \to X$ le morphisme déduit de $g \circ F^q$. Fixons un point $P \in C(k)$, et considérons le schéma $M = \mathrm{Mor}(C, X; f|P)$. Alors (prop. 3), on a $\dim_f M \geq -n\, g(C) + q\,(Y \circ K_X^*)$. Pour q assez grand, il existe donc une courbe lisse Γ et un morphisme fini $\varphi : \Gamma \to M$ tel que $f \in \varphi(\Gamma)$; on a $\varphi(\gamma)(P) = f(P)$ pour tout

$\gamma \in \Gamma$. Si Γ était complète, on aurait $\varphi(\gamma) = f$ pour tout γ d'après le théorème de rigidité, ce qui n'est pas. Si $\overline{\Gamma}$ est une compactification de Γ, l'application rationnelle $(\gamma,x) \mapsto \varphi(\gamma)(x)$ de $\overline{\Gamma} \times C$ dans X n'est pas partout définie. Cela implique l'existence d'une courbe rationnelle sur X (lever l'indétermination par éclatements et considérer la dernière courbe exceptionnelle obtenue).

3ème pas : Réduction à la caractéristique p.

La cause est donc entendue si k est de caractéristique $\neq 0$. Supposons k de caractéristique 0. Il existe un sous-anneau A de k, de type fini sur $\mathbb{Z}$, et un modèle X_A de X sur A lisse et projectif, de faisceau anticanonique relatif A-ample. Il existe alors (Grothendieck) un A-schéma quasi-projectif T "paramétrant les morphismes $f : \mathbb{P}^1 \to X_A$ tels que $0 < (f \cdot K^*_{X_A/A}) \leq n + 1$". Puisque T possède des points fermés au-dessus de tous les points fermés de Spec(A), $T \otimes_A k$ est non vide, d'où le théorème.

COROLLAIRE .- Soit X une variété projective et lisse, de dimension $n > 0$, dont le fibré tangent est ample.

a) Pour toute courbe rationnelle C de X, on a $(C \cdot K^*_X) \geq n+1$.

b) X possède des courbes rationnelles C telles que $(C \cdot K^*_X) = n+1$.

c) Soit C une courbe rationnelle de X telle que $(C \cdot K^*_X) = n+1$, et soit $f : \mathbb{P}^1 \to X$ la normalisation de C . Alors f est non ramifié et f^*T_X est isomorphe à $\mathcal{O}(2) \oplus \mathcal{O}(1)^{n-1}$.

Puisque K^*_X est ample (§ 2, d)), la partie b) résulte de a) et du théorème 3. Soient C une courbe rationnelle de X et $f : \mathbb{P}^1 \to X$ la normalisation de C ; alors f^*T_X est ample sur $\mathbb{P}^1$ (§ 2, a) et e)), donc de la forme $\mathcal{O}(r_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(r_n)$ avec $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_n > 0$ (§ 2, g)), avec $r_1 + \dots + r_n = (C \cdot K^*_X)$. Par ailleurs, le morphisme canonique $\lambda : T_{\mathbb{P}^1} \to f^* T_X$ est non nul ; puisque $T_{\mathbb{P}^1}$ est isomorphe à $\mathcal{O}(2)$, cela impose $r_1 \geq 2$; si $r_1 = 2$, alors λ est injectif. Le corollaire résulte aussitôt de là.

§ 6. Démonstration du théorème 1.

On considère donc une variété X projective, lisse et irréductible de dimension $n \geq 1$, dont le fibré tangent est lisse, et on choisit (§ 5, corollaire) un morphisme $f_o : \mathbb{P}^1 \to X$ tel que $f^*_o(K^*_X) \simeq \mathcal{O}(n + 1)$. Si $n = 1$, f_o est un isomorphisme. Supposons donc $n \geq 2$.

La variété auxiliaire V.

Fixons un point $a_o \in \mathbb{P}^1(k)$ tel que $f_o(\mathbb{P}^1)$ soit lisse au point $x_o = f_o(a_o)$ et soit V la composante connexe de f_o dans $\mathrm{Mor}(\mathbb{P}^1,X;f_o|(a_o))$. Pour tout $f \in V$,